Série d'exercices n° 3

Exercice 1

Trouver tous les polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant

1. $P \circ P = P$
2. $P(X^2) = P$
3. $P(X+1) = XP$
4. $Q^2 = XP^2$

Exercice 2

Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^3 + X^2 - X - 1$; $B = X + 1$
2. $A = X^3 - 2iX^2 - i$; $B = X + i$
3. $A = 2X^3 + 5X^2 + X - 2$; $B = X^2 + 2$

Exercice 3

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, et r et s les restes de la division euclidienne de P par $(X-a)$ et $(X-b)$ respectivement. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$, en fonction de r et s si $a \neq b$, et en fonction de $\widetilde{P}(a)$ et $\widetilde{P}'(a)$ si $a = b$.

Exercice 4 (Formule d'interpolation de Lagrange)

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$.
On cherche un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\widetilde{P}(x_1) = \alpha_1, \quad \widetilde{P}(x_2) = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \widetilde{P}(x_n) = \alpha_n$$

1. Montrer que si $\deg(P) \leq n-1$, alors P est unique.
2. Montrer que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, il existe un unique polynôme L_i vérifiant

$$\begin{cases} \deg(L_i) \leq n-1 \\ \widetilde{L_i}(x_j) = \delta_{ij} \end{cases}$$

3. On pose $P = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \cdots + \alpha_n L_n$.
   Montrer que le polynôme P répond à la question.
4. Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≤ 2 tel que $\widetilde{P}(0) = 1$, $\widetilde{P}(1) = -1$, et $\widetilde{P}(2) = -2$.

Exercice 5

On pose $P = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1 \in \mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer les polynômes dérivés $P^{(k)}$, pour $k \in [\![0;5]\!]$.
2. Ecrire la formule de Taylor, pour $n = 5$ et $a = i$, puis $a = -i$. En déduire l'ordre de multiplicité des racines i et $-i$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Exercice 7

On pose $P = (X+1)^n - (X-1)^n \in \mathbb{C}[X]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que z est une racine de P si et seulement si $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.
2. En déduire que z est une racine de P si et seulement si $z = -i\cot\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, où $k \in [\![1; n-1]\!]$.
3. Calculer le coefficient dominant de P. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}$.

Exercice 8

Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P_1 = X^4 - 1$
2. $P_2 = X^5 + 1$
3. $P_3 = X^4 + X^2 + 1$
4. $P_4 = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$

Exercice 9

$\wedge$ $\vee$

Calculer dans $\mathbb{R}[X]$ le PGCD et le PPCM des polynômes suivants :

$$A = X^6 - 2X^5 + X^4 - X^2 + 2X - 1; \qquad B = X^5 - 3X^3 + X^2 + 2X - 1$$

Exercice 10

1. Montrer que $A = X^5 - 1$ et $B = X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver $U, V \in \mathbb{C}[X]$ tels que $UA + VB = 1$.

Exercice 11

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

Montrer que α est une racine double de P si et seulement si α est une racine simple de $P \wedge P'$.

Exercice 12

Soient $n, m \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $d \mid n$ alors $(X^d - 1) \mid (X^n - 1)$.
2. On pose $n = mq + r$, où q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par m. Montrer que
$$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^m - 1) \wedge (X^r - 1)$$
3. On note $d = m \wedge n$. Montrer que $(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^d - 1)$.